***ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ***

**ΘΕΜΑ A**

**Α1.**Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα ∆. Αν η f είναι συνεχής στο ∆ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆ ισχύει f΄(x)=0 , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα ∆.

**Μονάδες 15**

**Α2.**Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σ(σωστό)** ή **Λ(λάθος)** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

**β.** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου Α=$\lim\_{x\to α^{+}}f(x)$) και Β=$\lim\_{x\to β^{-}}f(x)$)

**γ.** Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**δ.** Για κάθε συνάρτηση f:R→R που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ R .

**ε.** Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα ∆ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του ∆. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του ∆.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται πραγματική συνάρτηση g ,δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε g(x)>0 και g΄΄(x)g(x)-[g΄(x)]2>0 για κάθε x∈R.

Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η συνάρτηση  είναι γνησίως αύξουσα και

**Μονάδες 5**

**β.**  για κάθε x1,x2∈R.

**Μονάδες 20**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω f:R →R μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄΄(x)≠0 για κάθε x ∈ R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

* f΄΄(x).e-x – (f΄(x))2=0 για κάθε x ∈ R,
* 2f΄(0)+1=0 και
* f(0)= ln2

**α.** Να αποδείξετε ότι ισχύει f΄(x)+1=$\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$ x ∈ R.

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι: f(x)=ln(1+ex)-x , x∈ R .

**Μονάδες 3**

**γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

**Μονάδες 4**

**δ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει: 2f(x)+x≥ln4 για κάθε x ∈R .

**Μονάδες 5**

**ε.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

**Μονάδες 3**

**στ.** Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f-1 της f και να υπολογίσετε τα όρια:

 $\lim\_{x\to 0^{+}}f^{-1}(x)$ και $\lim\_{x\to +\infty }f^{-1}(x)$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική

παράσταση μιας παραγωγίσιμης

συνάρτησης f:R→R . Έστω $g\left(x\right)=\frac{1}{f(x)}$

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της g.

**Μονάδες 3**

**β.** Na βρείτε τα $\lim\_{x\to -\infty }g(x) και \lim\_{x\to +\infty }g(x)$

**Μονάδες 3**

**γ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cg.

**Μονάδες 4**

**δ.** Na βρείτε τη μονοτονία της g.

**Μονάδες 4**

**ε.** Na βρείτε τα τοπικά ακρότατα της g.

**Μονάδες 10**

**στ.** Na κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της g.

**Μονάδες 3**

**ζ.**Na χαράξετε τη γραφική παράσταση της g.

**Μονάδες 3**

*Είναι σωστό ή λάθος ότι:*

**1.**Αν f(α)=g(α) για κάποιο σημείο α του κοινού πεδίου ορισμού των f και g τότε f΄(α)=g΄(α)

**2.**Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ισχύει ότι αν η f είναι άρτια τότε η f΄ είναι περιττή.

**3.**Υπάρχει συνάρτηση f:R→R η οποία είναι παραγωγίσιμη με f΄(x)≠0 για κάθε x∈R η οποία δεν είναι 1-1.

**4.**Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x0 τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x0.

**5.**Αν η f δεν είναι συνεχής στο x0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x0.

**6.**Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x0 τότε η f ΄ είναι συνεχής στο x0.

**7.**Αν οι συναρτήσεις f και g ισχύει ότι οι f και f.g είναι παραγωγίσιμες στο x0 ,με f(x0)≠0 τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο x0.

**8.**Αν για τις συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το Α και η συνάρτηση f(x)+g(x) είναι παραγωγίσιμη στο x0∈A τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x0.

**9.**Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x0 ,τότε η συνάρτηση f.g είναι παραγωγίσιμη στο x0 ισχύει : (f.g)΄(x0)=f΄(x0).g΄(x0).

**10.**Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της Μ(x0,f(x0)) δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη Cf.

**11.**Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο[α,β] και ισχύει f΄(x)=0 για κάθε x∈(α,β) τότε η f δεν είναι σταθερή στο [α,β].

**12.**Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] παραγωγίσιμη στο (α,β) και f΄(x)≠0 για κάθε x∈(α,β) τότε f(α)≠f(β).

**13.**Αν μια συνάρτηση f δεν ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα [α,β] τότε η Cf δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

**14.**Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο διάστημα [α,β] τότε εφαρμόζεται και το Θ.Μ.Τ. στο ίδιο διάστημα.

**15.**Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

**16.**Αν η f διατηρεί πρόσημο στο (α,x0)∪(x0,β) τότε το f(x0) δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

**17.**Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο x0 και f΄(x0)=0 τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x0.

**18.**Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α,β) τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει πάντοτε ακριβώς μία ρίζα στο (α,β).

**19.**Αν f΄ συνεχής στο διάστημα [α,β] και f΄(x)≠0 για κάθε x0∈(α,β) τότε η f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο x0∈(α,β) .

**20.**Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f΄΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

**21.**Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση .

**22.**Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).Αν x0∈(α,β) και f΄΄(x)=0 τότε το Α(x0,f(x0) είναι σημείο καμπής της Cf πάντοτε.

**23.**Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και το Α(x0,f(x0)) με x0∈(α,β) είναι σημείο καμπής της Cf με οριζόντια εφαπτομένη ,τότε f΄ (x)= f΄΄(x)=0.

**24.**Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.

**25.**Αν η f είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

**26.**Αν η συνάρτηση f είναι άρτια ορισμένη στο R και δέχεται την y=λx+β ως ασύμπτωτη στο +∞ τότε δέχεται την y=-λx+β ως ασύμπτωτη στο -∞.

*Γενικές ασκήσεις στις παραγώγους*

**1.** Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο x0∈Δ. Να αποδείξετε ότι

**2.**Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g,παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει

g(x+y)=eyg(x)+exg(y)+xy+α για κάθε x,y∈R.

Να αποδείξετε ότι: **α)**g(0)=-α

 **β)**g΄(x)=g(x)+g΄(0)ex+x

**3.**Έστω η συνάρτηση f: (1,+∞)→R με f(x)=2000+|ln(x-1)|.Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου ,τα Α και Β. Nα αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

**4.**Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

* Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
* f΄΄=g΄΄ και
* 0∈Δ και f(0)=g(0)

Να δειχθεί ότι :

**α)**Για κάθε x∈Δ ,f(x)-g(x)=cx όπου c∈R

**β)**Αν η f(x)=0 έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ1,ρ2 ,τότε η g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα [ρ1,ρ2].

**5.**Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R.

**α)**Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις f΄=g ,g΄=-f τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f΄΄ και g΄΄ είναι συνεχείς .

Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις f΄΄+f=g΄΄+g=0 και ότι η συνάρτηση h=f2+g2 είναι σταθερή.

**β)**Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g .Να αποδείξετε ότι αν x1 και x2 είναι δύο ρίζες της f και f(x)≠0 για κάθε x∈(x1,x2) τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x1,x2).

**6.**Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,e] με 0<f(x)<1 και f΄(x)≥0 για κάθε x∈[1,e],να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνος ένας αριθμός x0∈(1,e) τέτοιος ώστε f(x0)+x0lnx0=x0.

**7.**Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού R, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και g(x)≠0 για κάθε x∈R.Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε και .Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R\{α} τέτοια ώστε για κάθε x∈R\{α} να αποδειχθεί ότι υπάρχει το .

**8.**Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στα (0,+∞).Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με g(x)=lnf(x),x∈Δ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση: f(x)f΄΄(x)≥[f΄(x)]2 για κάθε x∈Δ.

**α)**Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα ,στο οποίο η συνάρτηση g με g(x)=ln(x2+2) στρέφει τα κοίλα άνω.

**β)**Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με f(x)=αx-x,x∈R και 0<α<1.

**γ)**Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

 -αλ-2=(λ2-4)-(λ-2) όπου 0<α<1

**9.**Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,+∞) για την οποία ισχύει

  για κάθε x∈[0,+∞)

 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο x∈[0,+∞)

**10.**Έστω ότι η ευθεία y=2x+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞.

**α)**Να βρείτε τα όρια: 

**β)**Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν 

**11.**Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ με κ<λ και η συνάρτηση f(x)=(x-κ)5(x-λ)3 με x∈R. Να αποδείξετε ότι:

 **α)**για κάθε x≠κ και x≠λ.

 **β)**Η συνάρτηση g(x)=ln|f(x)| στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ,λ).

**12.**Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει f΄(x)≠0 για κάθε x∈R και η συνάρτηση g τέτοια για κάθε g(x)f΄(x)=2f(x) για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το A(x0,f(x0)) τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο B(x0,f(x0)) είναι παράλληλη στην ευθεία y-2x+5=0

**13.**Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση ,όπου Α ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση  και υποθέτουμε ότι Κ(0)=0.Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.